



TITLE:

# A note on a 3-dimensional extension of the Maskit slice(Topology, Complex Analysis and Arithmetic of Hyperbolic Spaces)

AUTHOR(S):

荒木, 義明; 糸, 健太郎; 小森, 洋平

---

CITATION:

荒木, 義明 ...[et al]. A note on a 3-dimensional extension of the Maskit slice(Topology, Complex Analysis and Arithmetic of Hyperbolic Spaces). 数理解析研究所講究録 2007, 1571: 172-192

ISSUE DATE:

2007-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81281>

RIGHT:

## A note on a 3-dimensional extension of the Maskit slice

荒木 義明 (Yoshiaki Araki) インテリシンク株式会社 (Intellisync K.K.)

糸 健太郎 (Kentaro Ito) 名古屋大学多元数理 (Nagoya University)

小森 洋平 (Komori Yohei) 大阪市大理 (Osaka City University)

### 1 Introduction

$(n+1)$  次元双曲空間  $H^{n+1}$  の向きを保つ等距離自己同型写像全体を  $\text{Isom}(H^{n+1})$  と書く.  $H^{n+1}$  は  $n$  次元球面  $S^n$  を理想境界にもち, その  $S^n$  の向きを保つ等角自己同型写像全体を  $\text{Conf}(S^n)$  と書くとき自然な同一視  $\text{Isom}(H^{n+1}) = \text{Conf}(S^n)$  が存在する.  $\text{Isom}(H^{n+1})$  の離散部分群を  $(n+1)$  次元クライン群という. 通常, クライン群といえば  $n=2$  の場合, すなわち  $\text{Isom}(H^3) = \text{Conf}(S^2)$  の離散部分群のことを指す. この場合は 3 次元トポロジーの研究と相まって深く研究されている. 一方で 4 次元以上のクライン群を高次元クライン群ということにする. 高次元クライン群に関する研究に関しては Apanasov [2] や Kapovich [6]などを参照されたい.

さて, 高次元クライン群の中でも特に 4 次元クライン群は, その極限集合が 3 次元空間  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  の中のフラクタル集合であるため幾何学的直感が働くので, 独自の面白さがあると思われる. この方面では, 具体的な 4 次元クライン群の極限集合のコンピュータ画像を描く試みとして Ahara-Araki [1] がある. これは極限集合が  $S^2$  全体である 3 次元クライン群の中で,  $\text{Conf}(S^3)$  のなかで離散性を保ったまま変形できる族を見つけたものである. また, 4 次元クライン群は quaternion algebra を用いた扱いが可能である. これに関しては Cao-Parker-Wang [5] や Kido [7] を参照されたい.

この論説でも, 具体的な 3 次元クライン群  $\Gamma \subset \text{Conf}(S^2)$  を  $\text{Conf}(S^3)$  の中で離散性を保ちつつ変形することを考える. ここで考える群は, 1 点穴あきトーラス群と呼ばれるものの中でも accidental parabolic を持つもの: すなわち商多様体  $H^3/\Gamma$  の理想等角境界が  $(0, 3)$ -曲面と  $(1, 1)$ -曲面からなるものである. この群の  $\text{Conf}(S^2)$  の中での変形空間は 1 点穴あきトーラス群の Maskit slice としてよく知られており, 複素平面の部分領域として実現できる. ここでは, この群の  $\text{Conf}(S^3)$  の中での変形空間が, Maskit slice をその切り口として含むような  $\mathbb{R}^3$  の部分領域として実現できることを示す. さらに, この変形空間の別の実 2 次元の切り口として, 別のタイプのクライン群  $\Gamma'$  の  $\text{Conf}(S^2)$  での変形空間が現れることを示す. ここで  $\Gamma'$  は  $H^3/\Gamma'$  の理想等角境界が 2 つの  $(0, 3)$ -曲面と 1 つの  $(0, 4)$ -曲面からなるものである.

さらに Appendix では上の結果の応用として, 不連続領域が群不変な単連結成分を持つような 4 次元クライン群の具体例を与え, その変形空間を考える. この群はある 6 面体 (図 11) を基本領域とする群として与えられる. 2003 年に荒木と糸が共同研究を始めた時, 最初に考えた設定がこの群の変形であった.

この研究に関するコンピュータ・グラフィックスなどは

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/3d-maskit.html>

を参照されたい.

## 2 Preliminaries

### 2.1 $\text{Conf}(\mathbb{S}^n)$

ここでは  $\text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  に関する基本事項をまとめる. この記述は主に Matsumoto [11] を参考にした. その他に Apanasov [2], Berdon [4] などにも参考になる. 以下では主に  $n = 2, 3$  のときを扱う.  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

と定める.  $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  には  $\mathbb{R}^n$  から定まる等角構造を入れる. 向きを保つ  $\mathbb{S}^n$  の等角自己同型写像全体を  $\text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  と書く.  $\text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  の任意の元は,  $\mathbb{S}^n$  に含まれる  $(n-1)$ -次元球面に関する inversion の偶数個の積として得られることが知られている. ここで  $(n-1)$ -次元球面  $\sigma \subset \mathbb{S}^n$  に関する inversion  $J_\sigma$  は,  $\sigma$  が中心  $a \in \mathbb{R}^n$ , 半径  $r > 0$  の球面であるときは

$$J_\sigma(x) = r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} + a \quad (1)$$

で定義され,  $\sigma$  が  $\infty$  を含む, すなわち  $\sigma$  が  $(n-1)$ -次元平面であるときはその平面に関する鏡映変換で定義される. 以下では, 中心  $0$ , 半径  $1$  の単位球面に関する inversion を

$$J(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

と書く. このとき式 (1) の  $J_\sigma$  に関して  $J_\sigma = r^2 J(x - a) + a$  が成り立つ.

**Lemma 2.1.**  $f \in \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  に対して次が成り立つ:

- (1)  $f(\infty) = \infty$  のとき, ある  $\lambda > 0$ ,  $P \in SO(3)$ ,  $u \in \mathbb{R}^3$  が存在して  $f(x) = \lambda P(x) + u$  が成り立つ.
- (2)  $f(\infty) \neq \infty$  のとき, ある  $\lambda > 0$ ,  $P \in O(3) \setminus SO(3)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^3$  が存在して  $f(x) = \lambda P J(x - u) + v$  が成り立つ.

Lemma 2.1 (2) の場合,  $f(u) = \infty$  と  $f(\infty) = v$  に注意する. ここで中心  $u$ , 半径  $\sqrt{\lambda}$  の球面を  $I(f)$ , 中心  $v$ , 半径  $\sqrt{\lambda}$  の球面を  $I(f^{-1})$  と書く. このとき  $J_{I(f)}(x) = \lambda J(x - u) + u$  を用いると

$$f(x) = P(J_{I(f)}(x) - u) + v$$

が成り立つことが分かる. 従って  $f$  は  $I(f)$  の内側を  $I(f^{-1})$  の外側に写す. この  $I(f)$  を  $f$  の isometric sphere と呼ぶ.

標準的埋め込み  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  を  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  と定める. このとき, 任意の  $f \in \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  に対して一意的にある  $\tilde{f} \in \text{Conf}(\mathbb{S}^{n+1})$  が存在して  $\tilde{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$  が成り立つ. この  $\tilde{f} \in \text{Conf}(\mathbb{S}^{n+1})$  を  $f \in \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  の Poincaré extension という. 具体的には,  $f$  が  $2k$  個の球  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \subset \mathbb{S}^n$  の inversion の合成であるとき,  $\tilde{f}$  は  $2k$  個の球  $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{2k} \subset \mathbb{S}^{n+1}$  の inversion の合成である. ここで  $\tilde{\sigma}_j$  は  $\sigma_j$  を含み  $\mathbb{S}^n$  に直交する球である.

$(n+1)$ -次元双曲空間  $\mathbf{H}^{n+1}$  の上半空間モデルを

$$\mathbf{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}; \quad ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_{n+1}^2}$$

とする. 任意の  $f \in \text{Conf}(\mathbf{S}^n)$  に対して, その Poincaré extension  $\tilde{f} \in \text{Conf}(\mathbf{H}^{n+1})$  は  $\mathbf{H}^{n+1}$  の向きを保つ等距離同型を誘導する. 従ってこの同一視の元で  $\text{Isom}(\mathbf{H}^{n+1}) = \text{Conf}(\mathbf{S}^n)$  が成り立つ.

**Lemma 2.2** ( $\text{Conf}(\mathbf{S}^n)$  の元の分類).  $f \in \text{Conf}(\mathbf{S}^n) = \text{Isom}(\mathbf{H}^{n+1})$  とする.  $f$  は  $\mathbf{H}^{n+1}$  に固定点を持つとき *elliptic* であるという.  $f$  が *elliptic* でないとき,  $f$  は  $\mathbf{S}^n$  に 1 つまたは 2 つの固定点を持つ. 固定点が 1 つの場合  $f$  は *parabolic* といい, 固定点が 2 つの場合  $f$  は *loxodromic* という. さらに次が成り立つ:

- (1)  $f$  が *elliptic* とする. ここでのみ  $(n+1)$ -次元双曲空間の単位球モデル  $\mathbf{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| < 1\}$ ,  $\partial\mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$  で考える. このとき  $f(0) = 0$  ならば, ある  $P \in SO(n+1)$  が存在して

$$f(x) = P(x)$$

が成り立つ.

- (2) 以下では再び  $\mathbf{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  で考える.

$f$  が *parabolic* で  $f(\infty) = \infty$  ならば, ある  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \neq 0$  と  $P \in SO(n)$  s.t.  $P(u) = u$  が存在して

$$f(x) = P(x) + u$$

が成り立つ.

- (3)  $f$  が *loxodromic* で  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$  ならば, ある  $\lambda > 0$ ,  $P \in SO(n)$  が存在して

$$f(x) = \lambda P(x)$$

が成り立つ.

特に  $n=3$  の場合について見ておく.  $f \in \text{Conf}(\mathbf{S}^3)$  が *loxodromic* であるとする.  $P \in SO(3)$  は必ず 1 を固有値に持つので,  $f$  は  $\text{Conf}(\mathbf{S}^2)$  の *loxodromic* な元  $g(\tau) = \lambda e^{i\theta} \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$  の Poincaré extension に共役である. また  $f \in \text{Conf}(\mathbf{S}^3)$  が *parabolic* のとき,  $f$  は写像  $g(\tau, z) = (e^{i\theta} \tau, z + 1)$ ,  $(\tau, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  に共役である. 特に  $f$  が写像  $g(\tau, z) = (\tau, z + 1)$  に共役であるとき,  $f$  は *parabolic without rotation* という.

$\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbf{H}^{n+1})$  が  $\mathbf{H}^{n+1}$  に properly discontinuous に作用するとは, 任意のコンパクト集合  $K \subset \mathbf{H}^{n+1}$  に対して  $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$  となる  $\gamma \in \Gamma$  が有限個であるときをいう.  $\Gamma$  が  $\mathbf{H}^{n+1}$  に properly discontinuous に作用するとき,  $\Gamma$  を *クライン群* という.  $\text{Isom}(\mathbf{H}^{n+1}) = \text{Conf}(\mathbf{S}^n)$  の同一視の元に,  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbf{H}^{n+1})$  が *クライン群* であることと,  $\Gamma \subset \text{Conf}(\mathbf{S}^n)$  が一様収束位相に関して離散的であることは同値である. 従って, ある開集合  $U \subset \mathbf{S}^n$  が存在して  $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$  となる  $\gamma \in \Gamma$  が有限個あるとき,  $\Gamma$  は *クライン群* になる. *クライン群*  $\Gamma \subset \text{Conf}(\mathbf{S}^n)$  の region of discontinuity  $\Omega(\Gamma) \subset \mathbf{S}^n$  を次の性質を満たす点  $x \in \mathbf{S}^n$  の集合と定める:  $x$  のある近傍  $U$  が存在して  $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$  となる  $\gamma \in \Gamma$  は有限個である.  $\Omega(\Gamma)$  の補集合  $\Lambda(\Gamma) := \mathbf{S}^n \setminus \Omega(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の limit set という.

## 2.2 (0, 3)-, (0, 4)- and (1, 1)-type groups in $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$

以下では、ある群  $G$  とその部分集合  $S \subset G$  が与えられたとき、 $S$  で生成される  $G$  の部分群を  $\langle S \rangle$  で表すことにする。

種数  $g$  の曲面から  $n$  個の点を取り除いたものを  $(g, n)$ -型曲面といい  $\Sigma_{g,n}$  で表す。中への同型写像  $\varphi : \pi_1(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  が型を保つとは、 $\pi_1(\Sigma_{g,n})$  の puncture に対応する元が  $\varphi$  によって parabolic 元に写されるときをいう。この節では  $(g, n) = (0, 3), (0, 4), (1, 1)$  の場合に、型を保つ同型写像  $\varphi : \pi_1(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の像の共役による正規化を調べる。 $\pi_1(\Sigma_{0,4})$  や  $\pi_1(\Sigma_{1,1})$  の生成元は図 1 のように取る。

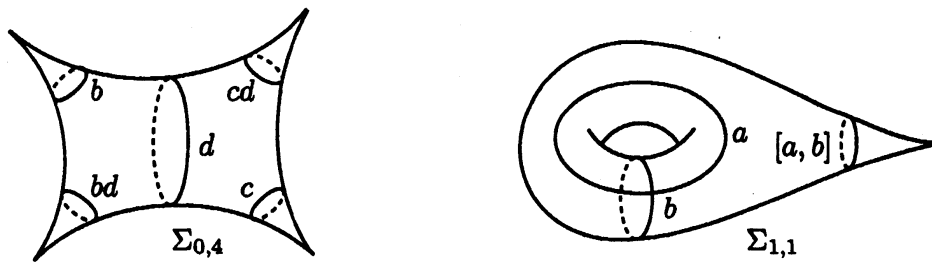


図 1:  $\Sigma_{0,4}$ ,  $\Sigma_{1,1}$  と、その基本群  $\pi_1(\Sigma_{0,4}) = \langle b, c, d \rangle$ ,  $\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b \rangle$  の元ホモロジー類

**Lemma 2.3** (groups of (0, 3)-type). 型を保つ中への同型写像  $\phi : \pi_1(\Sigma_{0,3}) = \langle b, c \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  は共役により次の形にできる：

$$\phi(b) = B, \phi(c) = C; \quad B(\tau) = \tau + 2, \quad C(\tau) = \frac{\tau}{2\tau + 1}.$$

**Lemma 2.4** (groups of (0, 4)-type).  $\eta : \pi_1(\Sigma_{0,4}) = \langle b, c, d \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  を型を保つ中への同型写像とし、さらに  $\eta(d)$  が parabolic とする。このときある  $\mu \in \mathbb{C}$  が一意的に存在して、 $\eta$  は次の  $\eta_\mu : \pi_1(\Sigma_{0,4}) = \langle b, c, d \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  に共役である：

$$\eta_\mu(b) = B, \eta_\mu(c) = C, \eta_\mu(d) = D_\mu; \quad B(\tau) = \tau + 2, \quad C(\tau) = \frac{\tau}{2\tau + 1}, \quad D_\mu(\tau) = C(\tau - \mu) + \mu.$$

以下では  $H_\mu = \langle B, C, D_\mu \rangle$  と表す。

**Lemma 2.5** (groups of (1, 1)-type).  $\rho : \pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  を型を保つ中への同型写像とし、さらに  $\rho(b)$  が parabolic とする。このときある  $\mu \in \mathbb{C}$  が一意的に存在して、 $\rho$  は次の  $\rho_\mu : \pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  に共役である：

$$\rho_\mu(a) = A_\mu, \rho_\mu(b) = B; \quad A_\mu(\tau) = \frac{1}{\tau} + \mu, \quad B(\tau) = \tau + 2.$$

以下では  $G_\mu = \langle A_\mu, B \rangle$  と表す。

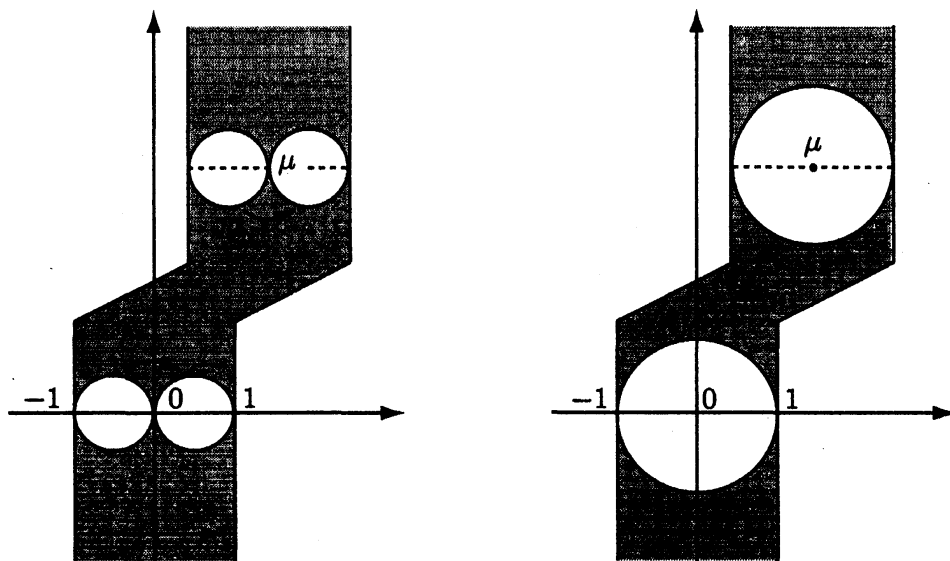


図 2:  $H_\mu$  と  $G_\mu$  の基本領域 (灰色の部分)

### 2.3 Maskit slices for $(0, 4)$ - and $(1, 1)$ -type groups.

$\mu \in \mathbb{C}$  に対して上のように  $\eta_\mu$ ,  $H_\mu = \langle B, C, D_\mu \rangle$ ,  $\rho_\mu$ ,  $G_\mu = \langle A_\mu, B \rangle$  を定める. ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{0,4} &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid \eta_\mu : \text{discrete, faithful}\}, \\ \mathcal{M}_{1,1} &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid \rho_\mu : \text{discrete, faithful}\} \end{aligned}$$

とおき, それぞれを  $(0, 4)$ -,  $(1, 1)$ -type の Maskit slice と呼ぶ.

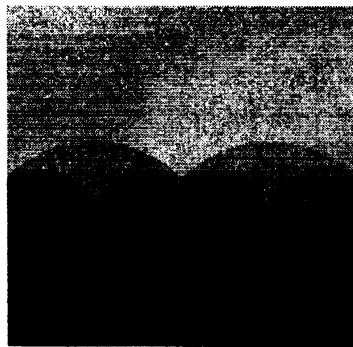


図 3: Maskit slice  $\mathcal{M}_{1,1}$  の一部 (図は  $2i$  を中心とする 1 辺が 4 の正方領域)

任意の  $\mu \in \mathbb{C}$  に対して

$$C = A_\mu^{-1} B A_\mu, \quad D_\mu = A_\mu B A_\mu^{-1}$$

が成り立つことがチェック出来る. 従って常に  $H_\mu \subset G_\mu$  であり, これより  $\mathcal{M}_{1,1} \subset \mathcal{M}_{0,4}$  が分かる. さらに次のことが知られている:

**Proposition 2.6** (Kra [8]).  $\mathcal{M}_{1,1} = 2\mathcal{M}_{0,4}$  が成り立つ. すなわち, 写像  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \tau \mapsto 2\tau$  は  $\mathcal{M}_{0,4}$  から  $\mathcal{M}_{1,1}$  の全単射を与える.

実際  $H_\mu$  と  $G_{2\mu}$  は共役を除いて commensurable であることが示されて,  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  と  $2\mu \in \mathcal{M}_{1,1}$  が同値となる.

### 3 3-dimensional extension of $\mathcal{M}_{1,1}$

以下では平面  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  を  $P_{z=0}$  と書いたりする. また  $\hat{P}_{z=0} := P_{z=0} \cup \{\infty\}$  と書く.

$\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  のときと同様に, 中への同型写像  $\varphi: \pi_1(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  が型を保つとは,  $\pi_1(\Sigma_{g,n})$  の puncture に対応する元が  $\varphi$  によって parabolic without rotation に写されるときをいう.

#### 3.1 (0, 3)- and (0, 4)-type groups in $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$

Lemma 2.3 より,  $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の中で (0, 3)-type group (triangle group) は rigid であった. この事実は  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  の部分群としても正しい. すなわち, 次が成り立つ:

**Proposition 3.1** (groups of (0, 3)-type). 型を保つ中への同型写像  $\phi: \pi_1(\Sigma_{0,3}) = \langle b, c \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  は共役により次の形にできる:

$$\phi(b) = B, \phi(c) = C; \quad B(x) = x + (2, 0, 0), \quad C(x) = JBJ(x).$$

この群  $\langle B, C \rangle \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  は  $\langle B(\tau) = \tau + 2, C(\tau) = \tau / (2\tau + 1) \rangle \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の Poincaré extension である.

*Proof.* 最初に  $\text{Fix}(B) \neq \text{Fix}(C)$  に注意する. 実際  $\text{Fix}(B) = \text{Fix}(C)$  とすると 2 つの parabolic without rotation  $B, C$  は可換となり  $\langle B, C \rangle$  が rank-2 free であることに矛盾. 従って, 共役を取ることで  $B(x) = x + (2, 0, 0)$  かつ  $C(0) = 0$  としてよい. parabolic without rotation  $C$  は  $\text{Fix}(C) = 0$  を通る全ての球面  $\cong \mathbb{S}^2$  を向きを込めて不変にすることに注意すると, 群  $\langle B, C \rangle$  は球面  $\hat{P}_{z=0} = \hat{\mathbb{C}}$  を向きを込めて不変にすることが分かる. 従って  $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の (0, 3)-type group の正規化の話に帰着して結論を得る.  $\square$

次に,  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  の (0, 4)-type group は  $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の (0, 4)-type group に共役であることを見る:

**Proposition 3.2** (groups of (0, 4)-type).  $\eta: \pi_1(\Sigma_{0,4}) = \langle b, c, d \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  を型を保つ中への同型写像とし, さらに  $\eta(d)$  が parabolic without rotation であるとする. このときある  $p = (p, q, 0) \in P_{r=0}$  が存在して,  $\eta$  は次の  $\eta_p: \pi_1(\Sigma_{0,4}) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  に共役である:

$$\begin{aligned} \eta_p(b) &= B, \quad \eta_p(c) = C, \quad \eta_p(d) = D_p; \\ B(x) &= x + (2, 0, 0), \quad C(x) = JBJ(x), \quad D_p(x) = C(x - p) + p. \end{aligned}$$

ここで群  $H_p := \langle B, C, D_p \rangle$  は  $\mu = p + qi$  に関する群  $H_\mu = \langle B, C, D_\mu \rangle \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の Poincaré extension である. さらに  $p = (p, q, 0) \in P_{r=0}$  は  $p$ -軸に関する角度  $\pi$  回転  $R_\pi: (p, q, r) \mapsto (p, -q, -r)$  を除いて一意的である.

*Proof.*  $B = \eta(b), C = \eta(c), D = \eta(d)$  で生成される群  $\langle B, C, D \rangle$  の部分群  $\langle B, C \rangle, \langle B, D \rangle$  がそれぞれ  $(0, 3)$ -type であることに注意する. ここで共役を取ることで  $B(x) = x + (2, 0, 0), C(x) = JBJ(x)$  とすると, 共役に関する残りの自由度は  $x$ -軸に関する回転のみである. ここで  $x$ -軸に関する回転で  $\text{Fix}(D) = p \in P_{z=0}$  とでき, この  $p$  は  $x$ -軸に関する角度  $\pi$  回転  $R_\pi : (p, q, r) \mapsto (p, -q, -r)$  を除いて一意的である. ここで  $(0, 3)$ -type group  $\langle B, D \rangle$  を平行移動  $T_p(x) = x + p$  で共役を取ることで  $(0, 3)$ -type group  $\langle B, T_p^{-1}DT_p \rangle$  を得るが,  $\text{Fix}(T_p^{-1}DT_p) = 0$  であることから Proposition 3.1 の証明より  $T_p^{-1}DT_p = C$  が成り立つ. 従って  $D(x) = T_pCT_p^{-1}(x) = C(x - p) + p$  を得る.  $\square$

任意の  $p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$  に対して, Proposition 3.2 のように  $H_p = \langle B, C, D_p \rangle$  を定めると, これは  $(0, 4)$ -type group であり,  $x$ -軸に関する回転による共役で群  $H_{p'}$  ( $p' = (p, \sqrt{q^2 + r^2}, 0) \in P_{r=0}$ ) に共役である.

### 3.2 $(1, 1)$ -type group in $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$

ここでは  $(1, 1)$ -type group の  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  における変形空間が  $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  における変形空間より本質的に大きくなっていることを見る. 平面  $P_{z=0}$  や  $P_{r=0}$  の点と  $\mathbb{C}$  の点を次のように同一視する:

$$\begin{aligned} P_{z=0} \ni x &= (x, y, 0) \leftrightarrow \tau = x + iy \in \mathbb{C}, \\ P_{r=0} \ni p &= (p, q, 0) \leftrightarrow \mu = p + iq \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

この同一視の元で, 平面  $P_{z=0} \cong \mathbb{C}$  に作用している群  $G_\mu = \langle A_\mu(\tau) = 1/\tau + \mu, B(\tau) = \tau + 2 \rangle$  の Poincaré extension は

$$G_p = \langle A_p, B \rangle; \quad A_p(x) = \hat{J}J(x) + p, \quad B(x) = x + (2, 0, 0)$$

と書ける. ただし  $\hat{J}(x, y, z) = (x, -y, z)$  は平面  $P_{y=0}$  に関する inversion とする. ここでパラメータ  $p$  を  $\mathbb{R}^3$  の中で動かしても,  $B, [A, B]$  が parabolic without rotation という性質が保たれることは容易に見ることが出来る. 逆に  $G_\mu \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  における変形はこの形に正規化される:

**Theorem 3.3** (groups of  $(1, 1)$ -type).  $\rho : \pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  を型を保つ中への同型写像とし, さらに  $\rho(b)$  が parabolic without rotation であるとする. このときある  $p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$  が存在して,  $\rho$  は次の  $\rho_\mu : \pi_1(\Sigma_{1,1}) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  に共役である:

$$\rho_p(a) = A_p, \quad \rho_p(b) = B; \quad A_p(x) = \hat{J}J(x) + p, \quad B(x) = x + (2, 0, 0).$$

さらに  $p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$  は  $p$ -軸に関する角度  $\pi$  回転  $R_\pi : (p, q, r) \mapsto (p, -q, -r)$  を除いて一意的である. 以下では  $G_p = \langle A_p, B \rangle$  と表す.

*Proof.*  $\rho(a) = A, \rho(b) = B$  とおく. 最初に  $\text{Fix}(A) \cap \text{Fix}(B) = \emptyset$  に注意する. 実際,  $x \in \text{Fix}(A) \cap \text{Fix}(B)$  とすると,  $x \in \text{Fix}(ABA^{-1}B^{-1}) = \text{Fix}([A, B])$  が成り立つ. ここで  $B, [A, B]$  が parabolic without rotation であるので  $B$  と  $[A, B]$  は可換となるが, これは群  $\langle A, B \rangle$  が free であることに矛盾する.



従って、共役を取って  $B(\infty) = \infty$ ,  $A(0) = \infty$  とする. 残っている共役の自由度は  $0$  中心の拡大と  $SO(3)$  の元による回転である. いま原点  $0$  中心の拡大による共役をとることで,  $A$  の isometric sphere の半径を  $1$  とする. このとき Lemma 2.1 より, ある  $p, u \in \mathbb{R}^3$  と  $P \in (3) \setminus SO(3)$  が存在して  $A(x) = PJ(x) + p$ ,  $B(x) = x + u$  と書ける. ここで  $v \in \mathbb{R}^3$  方向の平行移動を  $T_v(x) = x + v$  と書くことにすると

$$A(x) = T_p PJ(x), \quad B(x) = T_u(x), \quad A^{-1} = JP^{-1}T_{-p}(x), \quad B^{-1}(x) = T_{-u}(x)$$

となる. このとき  $A^{-1}B^{-1}AB = A^{-1}B^{-1}[A, B]BA$  を計算すると

$$\begin{aligned} A^{-1}B^{-1}AB(x) &= JP^{-1}T_{-p}T_{-u}T_pPJTu(x) \\ &= JP^{-1}T_{-u}PJT_u(x) \\ &= JT_{-P^{-1}(u)}JT_u(x) \end{aligned}$$

となる. ただし最後の等号は,  $P$  が線形なので  $P^{-1}T_{-u}P(x) = P^{-1}(P(x) - u) = x - P^{-1}(u) = T_{-P^{-1}(u)}(x)$  が成り立つことを用いた.

いま  $SO(3)$  の元  $Q$  で共役を取ることで, 始めから

$$u = (u, v, 0), \quad P^{-1}(u) = (u, -v, 0), \quad u, v \geq 0$$

の形をしているとしてよい. (実際,  $Q \in SO(3)$  として  $u, P^{-1}(u) \in \mathbb{R}^3$  を  $(u, v, 0), (u, -v, 0) \in \mathbb{R}^3$  にそれぞれ移すものを取ればよい.) このとき  $u, P^{-1}(u)$  が平面  $P_{z=0}$  に含まれているので, 写像  $A^{-1}B^{-1}AB(x) = JT_{-P^{-1}(u)}JT_u(x)$  はその形から球面  $\hat{P}_{z=0}$  を不変にする. さらに  $P_{z=0} \ni x = (x, y, 0) \leftrightarrow \tau = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $P_{z=0} \ni u = (u, v, 0) \leftrightarrow \mu = u + iv \in \mathbb{C}$  の同一視のもとで, 写像  $x \mapsto A^{-1}B^{-1}AB(x) = JT_{-P^{-1}(u)}JT_u(x)$  は  $\tau \mapsto \frac{\tau + \mu}{-\mu\tau + 1 - \mu^2}$  に対応し, その行列表現は

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 - \mu^2 \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$$

となる. 従って  $A^{-1}B^{-1}AB$  が parabolic である必要十分条件は  $\text{Re } \mu \geq 0$  より  $\mu = 2$  である. 従って  $u = P^{-1}(u) = (2, 0, 0)$  を得る.

さてここで  $u = P^{-1}(u)$  より, 上で取った  $Q \in SO(3)$  の取り方にはさらに  $x$ -軸に関する回転分の自由度があることに注意する. いま  $x$ -軸に関する角度  $\theta \in \mathbb{R}$  の回転を  $R_\theta \in SO(3)$  と書くことにする. いま  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  は  $x$ -軸を固定するので, ある  $\varphi \in \mathbb{R}$  が存在して  $P = R_\varphi \hat{J}$  と書ける. ここで任意の  $\theta$  に対して,  $\hat{J}R_{-\theta} = R_\theta \hat{J}$  と  $JR_\theta = R_\theta J$  が成り立つことを用いると

$$R_\theta A R_\theta^{-1}(x) = R_\theta(R_\varphi \hat{J} J R_{-\theta}(x) + p) = R_{\varphi+2\theta} \hat{J} J(x) + R_\theta(p), \quad R_\theta B R_\theta^{-1}(x) = B(x)$$

を得る. 従って  $\theta \equiv -\varphi/2 \pmod{\pi}$  なる  $R_\theta$  で共役をとり,  $R_\theta(p)$  を改めて  $p$  とおけば, 求める正規化  $A(x) = \hat{J}J(x) + p$ ,  $B(x) = x + (2, 0, 0)$  を得る. 特に  $p \in \mathbb{R}^3$  は  $R_\pi$  の作用を除いて一意的である.  $\square$

ここで

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} = \{p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho_p : \text{faithful, discrete}\}$$

とおく. このとき定義から

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap P_{r=0} = \mathcal{M}_{1,1}$$

が成り立つ. ただし  $\mathcal{M}_{1,1} \subset \mathbb{C} \cong P_{r=0}$  と見ている.

任意の  $p \in \mathbb{R}^3$  に対して上のように  $H_p = \langle B, C, D_p \rangle$  と  $G_p = \langle A_p, B \rangle$  を定めると,

$$C = A_p^{-1} B A_p, \quad D_p = A_p B A_p^{-1}$$

が成り立つので, 常に  $H_p \subset G_p$  である. いま, 上と同じく  $R_\theta \in SO(3) \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  を  $x$ -軸に関する角度  $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  回転と定義する. さらに  $\mathbb{C} \ni \mu = p + iq \leftrightarrow p = (p, q, 0) \in P_{r=0}$  の同一視の元に  $R_\theta(\mu) := R_\theta(p) = (p, q \cos \theta, q \sin \theta)$  と定める. このとき次が成り立つ:

**Theorem 3.4.**

$$\bigcup_{\theta \in S^1} R_\theta(\{\mu \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } \mu| \geq 2\}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \subset \bigcup_{\theta \in S^1} R_\theta(\mathcal{M}_{0,4})$$

*Proof.*  $p \in \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  とすると  $G_p$  は discrete であるが,  $H_p \subset G_p$  より  $H_p$  も discrete である. ここで  $p = R_\theta(\mu)$  を満たす  $\mu \in \mathbb{C}$  を取ると  $H_p = R_\theta H_\mu R_\theta^{-1}$  が成り立つ (ここで  $H_\mu \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  と見ている) ので  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  を得る.

一方で  $p \in \bigcup_{\theta \in S^1} R_\theta(\{\mu \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } \mu| \geq 2\})$  ならば, Poincaré の多面体定理より  $G_p$  が discrete であることが分かる.  $\square$

### 3.3 $q = 0$ 平面

この節では  $p \in P_{q=0}$  の場合を考える. ここでの目標は  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap P_{q=0} = R_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{M}_{0,4})$  (Theorem 3.6) を示すことである. いま,  $p \in P_{q=0}$  のとき群  $G_p = \langle A_p, B \rangle$  は球面  $\hat{P}_{y=0}$  を不変にすることに注意する. ここで  $A_p(x) = \hat{J}J(x) + p$  は球面  $\hat{P}_{y=0}$  の向きを入れ替える. いま, 平面  $P_{y=0}$  や  $P_{q=0}$  の点と  $\mathbb{C}$  の点を次のように同一視する:

$$P_{y=0} \ni x = (x, 0, z) \leftrightarrow \tau = x + iz \in \mathbb{C},$$

$$P_{q=0} \ni p = (p, 0, r) \leftrightarrow \mu = p + ir \in \mathbb{C}.$$

このとき  $G_p$  の  $\hat{P}_{y=0} \cong \hat{\mathbb{C}}$  への作用は

$$G_\mu = \langle E_\mu, B \rangle; \quad E_\mu = \frac{1}{\tau} + \mu, \quad B(\tau) = \tau + 2$$

と書ける. ここで  $E_\mu$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  の向きを変える等角写像であり,  $E_\mu^2 = A_\mu^2$  が成り立つ. いま  $G'_\mu \subset G_\mu$  を向きを保つ元から成る位数 2 の部分群とすると

$$G'_\mu = \langle E_\mu^2, E_\mu^{-1} B E_\mu, B \rangle$$

が成り立つ. 実際  $G'_\mu \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  と  $[G_\mu : G'_\mu] = 2$  がチェックできる. さらに

$$E_\mu^{-1} B E_\mu(\tau) = \frac{\tau}{2\tau + 1} = C(\tau), \quad E_\mu B E_\mu^{-1}(\tau) = D_\mu(\tau) = C(\tau - \mu) + \mu$$

が成り立つので  $G'_\mu$  は  $H_\mu = \langle B, C, D_\mu \rangle$  を無限位数の部分群として含み,  $G'_\mu = \langle H_\mu, E_\mu^2 \rangle$  が成り立つ. ここで Klein-Maskit combination theorem を用いると  $G'_\mu$  が discrete である必要十分条件は  $H_\mu$  が discrete であることを示すことが出来る. これより Theorem 3.6 の主張を得るが, 後に Theorem 3.6 の拡張 (Theorem 3.7) の証明に用いることも考えて, ここでは  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  に関する combination Theorem [10] (cf. [2]) を準備する:

**Theorem 3.5** (Klein-Maskit combination Theorem II).  $H \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  を離散群,  $J_1, J_2$  を  $H$  の部分群,  $B_1, B_2 \subset \mathbb{S}^3$  を *closed topological ball* とする. さらに  $A \in \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  とする. これらが次の条件を満たすとき,  $G = \langle H, A \rangle$  は *discrete* で  $G \cong H *_A$  が成り立つ. ここで  $H *_A$  は  $H$  の  $A$  による HNN-extension (cf. [10]) である:

- (1)  $i = 1, 2$  に対して  $\dot{B}_i$  は  $(J_i, H)$ -invariant である. すなわち任意の  $h \in J_i$  に対して  $h(\dot{B}_i) = \dot{B}_i$  であり, 任意の  $h \in H \setminus J_i$  に対して  $h(\dot{B}_i) \cap \dot{B}_i = \emptyset$  である.
- (2) 任意の  $h \in H$  に対して  $h(\dot{B}_1) \cap \dot{B}_2 = \emptyset$ .
- (3)  $\mathbb{S}^3 \setminus \bigcup_{h \in H} h(B_1 \cup B_2)$  は開集合を含む.
- (4)  $A$  は  $B_1$  の内部から  $B_2$  の外部への同相写像である. すなわち  $A(\dot{B}_1) \cap \dot{B}_2 = \emptyset$  と  $A(\partial B_1) = \partial B_2$  が成り立つ.
- (5)  $J_2 = AJ_1A^{-1}$ .

注: (1), (2) は  $\Omega(H)/H$  の中に  $\dot{B}_1/J_1$  と  $\dot{B}_2/J_2$  がそれぞれ埋め込まれていて互いに交わらないということを保証する. (3) は  $\Omega(H)/H \setminus (B_1/J_1 \cup B_2/J_2)$  が内点を持つことを意味する. (4), (5) は  $A$  に関する条件で,  $\Omega(H)/H$  から  $\dot{B}_1/J_1$  と  $\dot{B}_2/J_2$  を取り除いたときに出来る境界が  $A$  の作用によりうまく張り合わされることを保証する.

*Outline of proof.*  $F = \mathbb{S}^3 \setminus \bigcup_{h \in H} h(B_1 \cup B_2)$  は  $H$ -不変の開集合を含むので開集合  $\Omega \subset F$  を  $h(\Omega) \cap \Omega = \emptyset$  となるように取る.  $\phi: H *_A \rightarrow G = \langle H, A \rangle$  を自然な準同型とすると, 任意の  $g \in H *_A \setminus \{\text{id}\}$  に対して  $\phi(g)(\Omega) \cap \Omega = \emptyset$  が言える. 従って  $\phi$  は同型で  $G = H *_A$  は離散的であることが分かる.  $\square$

**Theorem 3.6.**  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap P_{q=0} = R_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{M}_{0,4})$ .

ここで  $P_{q=0} = R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbb{C})$  に注意する.

*Proof.*  $p \in \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap P_{q=0}$  ならば  $p \in R_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{M}_{0,4})$  であることは Theorem 3.4 より分かる. 逆に  $p \in R_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{M}_{0,4})$  とする. このとき  $H_p = \langle B, C, D_p \rangle \subset G_p$  は discrete である. このときに  $G_p = \langle H_p, A_p \rangle$  も discrete になることを Klein-Maskit combination theorem II を用いて示す. いま

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\} \cup \{\infty\}, \quad B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq r\} \cup \{\infty\}$$

$$J_1 = \langle B, C \rangle, \quad J_2 = \langle B, D_p \rangle$$

とおき,  $H = H_p, A = A_p$  に対して Theorem 3.4 の条件を確認する (図 4 参照). いま  $p = R_{\frac{\pi}{2}}(\mu)$ ,  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  とすると,  $H_p$  は  $H_\mu$  の  $\hat{C} \cong \hat{P}_{y=0}$  への作用の Poincaré extension とみなせるので, 条件 (1), (2), (3) はよい. さらに条件 (4) もよく,  $C = A_p^{-1}BA_p, D_p = A_pBA_p^{-1}$  より条件 (5)  $J_2 = A_pJ_1A_p^{-1}$  も成り立つ. 従って Theorem 3.5 より  $G_p = \langle H_p, A_p \rangle$  は discrete となり, さらに  $G_p \cong H_p * A_p$  より  $\rho_p: \pi_1(\Sigma_{1,1}) \rightarrow G_p$  は同型写像である. 以上より  $p \in \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  が示された.  $\square$

### 3.4 Bending deformations

Theorem 3.6 より  $p \in R_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{M}_{0,4})$  ならば  $G_p$  が discrete であるが, ここではある  $\varphi_0 > 0$  が存在して, 離散性を保ったままの自然な変形  $\{G_{R_\varphi(p)} \mid -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$  が可能であることを見る. この変形は, 双曲 4 次元多様体  $H^4/G_p$  をその totally geodesic な 3 次元部分多様体に沿って bending したものと見なせる.

**Theorem 3.7.** ある  $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  が存在して任意の  $\theta \in [\frac{\pi}{2} - \varphi_0, \frac{\pi}{2} + \varphi_0]$  に対して

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap R_\theta(\mathbb{C}) = R_\theta(\mathcal{M}_{0,4})$$

が成り立つ.

*Proof.*  $p \in \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap R_\theta(\mathbb{C})$  ならば  $p \in R_\theta(\mathcal{M}_{0,4})$  であることは Theorem 3.4 より分かる. 逆に  $p \in R_\theta(\mathcal{M}_{0,4})$  とする. このとき  $H_p$  は discrete であるが,  $G_p = \langle H_p, A_p \rangle$  も discrete になることを, Combination Theorem (Theorem 3.5) を用いて示す.  $p = (p, q, r)$  に対して  $B_1, B_2$  と  $J_1, J_2 \subset H_p$  を Theorem 3.6 の証明と同様に定める (図 4 参照.) このとき Theorem 3.5 の条件 (4), (5) は同様に成り立つので, 条件 (1), (2), (3) が成り立つことを見る. ここで, ある  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  が存在して  $p = R_\theta(\mu)$  であるので, 群  $H_p$  は球面  $R_\theta(\hat{C})$  を不変にし, その作用は  $R_\theta(\hat{C}) \cong \hat{C}$  の同一視のもとに  $H_\mu$  の  $\hat{C}$  への作用に等しい. さらに, この同一視の元で  $B'_1 := B_1 \cap R_\theta(\hat{C})$  と  $B'_2 := B_2 \cap R_\theta(\hat{C})$  はそれぞれ  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) \leq 0\} \cup \{\infty\}$  と  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) \geq \text{Im}(\mu)\} \cup \{\infty\}$  に対応する. ここで, 群  $H_p$  の球面  $R_\theta(\hat{C})$  への作用に関して  $\dot{B}'_i$  が  $(J_i, H_p)$ -invariant, かつ, 任意の  $h \in H_p$  に対して  $h(\dot{B}'_1) \cap \dot{B}'_2 = \emptyset$  が成り立つことに注意する.

以下では  $\theta \leq \pi/2$  と仮定し,  $\varphi = \pi/2 - \theta$  とおく. ここで任意の  $h \in H_p$  に対して  $R_\theta(\hat{C})$  と  $h(B_i)$  の位置関係について考察する.  $S^3 \setminus R_\theta(\hat{C})$  は 2 つの open 3-ball  $D_1, D_2$  から成る. ここで  $D_1$  として,  $D_1 \cap B_1$  の内角が  $\pi/2 + \varphi$  である方を取る. ここで, 一般に  $S^3$  の中の 2 つの球  $K_1, K_2$  の交わり  $K_1 \cap K_2 (\neq \emptyset)$  に対して, その 2 つの面の交わる角度を  $K_1 \cap K_2$  の内部で測ったもの  $\psi (0 < \psi < \pi)$  を  $K_1 \cap K_2$  の内角ということにする. 任意の  $h \in H_p$  に対して,  $h$  は  $R_\theta(\hat{C})$  を向きを込めて不変にするので  $h(D_1 \cap B_1) = D_1 \cap h(B_1)$  が成り立ち,  $h$  は等角写像なので  $D_1 \cap h(B_1)$  の内角も  $\pi/2 + \varphi$  である. 同様に,  $D_1 \cap B_2$  の内角が  $\pi/2 - \varphi$  であり, 任意の  $h \in H_p$  に対しても  $D_1 \cap h(B_2)$  の内角は  $\pi/2 - \varphi$  である.

(1) ここで  $\dot{B}'_1$  が  $(J_1, H_p)$ -invariant であることを見る. ( $B_2$  が  $(J_2, H_p)$ -invariant であることも同様である.) まず, 任意の  $h \in J_1$  に対して  $h(\dot{B}'_1) = \dot{B}'_1$  は定義から明らかである. 次に任意の  $h \in H \setminus J_1$  に対して  $\dot{B}'_1 \cap h(\dot{B}'_1) = \emptyset$  を示す.  $\dot{B}'_1$  や  $h(\dot{B}'_1)$  が  $R_\theta(\hat{C})$  に関して  $D_1$  の方にせり出しているので,  $(D_1 \cap \dot{B}'_1) \cap (D_1 \cap h(\dot{B}'_1)) = \emptyset$  を示せばよい. ここで  $D_1 \cap \dot{B}'_1$  と  $D_1 \cap h(\dot{B}'_1)$  それ

ぞれの内角が  $\pi/2 + \varphi$  であり, それぞれ  $\dot{B}'_1$  と  $h(\dot{B}'_1)$  を 1 つの面に持つので, 下の lemma 3.8 より, ある  $\varphi_0$  が存在して  $\varphi < \varphi_0$  ならば  $(D_1 \cap \dot{B}_1) \cap (D_1 \cap h(\dot{B}_1)) = \emptyset$  が成り立つ.

(2) 次に, 任意の  $h \in H_p$  に対して  $h(\dot{B}_1) \cap \dot{B}_2 = \emptyset$  であることは, やはり  $D_1$  に制限して考えれば,  $D_1 \cap h(B_1)$  と  $D_1 \cap B_2$  のそれぞれの内角が  $\pi/2 + \varphi$  と  $\pi/2 - \varphi$  であることと, それぞれが  $h(\dot{B}'_1)$  と  $\dot{B}'_2$  を 1 つの面に持つことから従う.

(3) 最後に  $S^3 \setminus \bigcup_{h \in H_p} h(B_1 \cup B_2)$  が開集合を含むことを示す. このことは  $h(B_i)$  ( $i = 1, 2$ ) が  $R_\theta(\hat{C})$  と交わり, その半径は  $r/2$  以下であることから明らかである.  $\square$

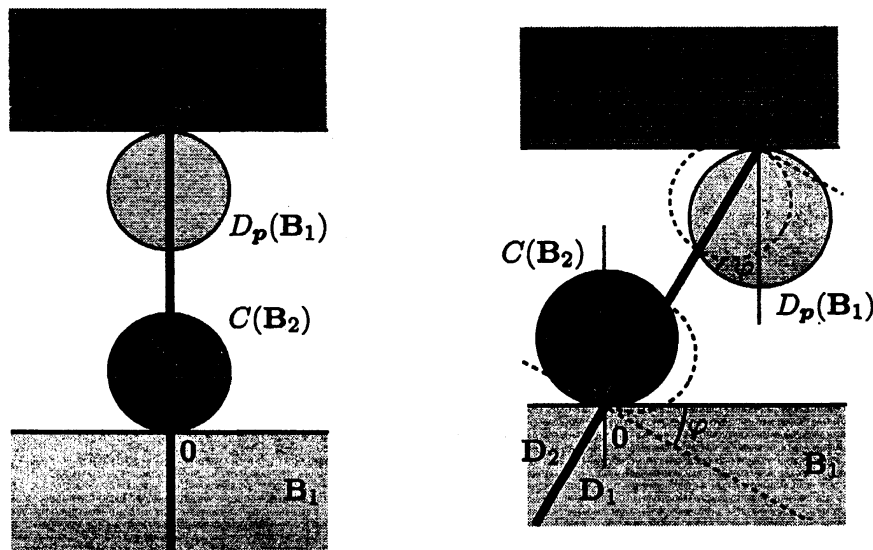


図 4: Theorem 3.6 (左) と 3.7 (右) の証明の説明図.

ここで  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  に対して  $H_\mu$  を考える.  $H_\mu$  の  $(0, 3)$ -type subgroup  $\langle B, C \rangle$  で不変な  $\Omega(H_\mu)$  の成分は  $\dot{B}'_1 := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) < 0\}$  であり,  $\langle B, D_\mu \rangle$  で不変な成分は  $\dot{B}'_2 := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > \text{Im}(\mu)\}$  である.  $H^3/H_\mu$  の convex core の相対境界は 2 つの totally geodesic  $(0, 3)$ -surface を含み, それぞれは理想境界  $\dot{B}'_1/\langle B, C \rangle$ ,  $\dot{B}'_2/\langle B, D_\mu \rangle$  と面している.

**Lemma 3.8** (Basmajian [3]). ある  $k_0 > 0$  が存在して, 任意の  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  に対して,  $H^3/H_\mu$  の中で  $\langle B, C \rangle \subset H_\mu$  に対応する totally geodesic  $(0, 3)$ -surface  $\Sigma$  は双曲距離に関する  $k_0$ -近傍を持つ. すなわち, 普遍被覆  $\pi: H^3 \rightarrow H^3/H_\mu$  に関する  $\Sigma$  の逆像  $\pi^{-1}(\Sigma)$  の各連結成分は互いに交わらない  $k_0$ -近傍を持つ.

上の主張で  $\pi^{-1}(\Sigma)$  の 1 つの連結成分  $\tilde{\Sigma}$  は, 理想境界  $\partial H^3 = \hat{C}$  と垂直に交わる半球面であり, その  $k_0$ -近傍の相対境界の 2 つの連結成分は, それぞれ  $\tilde{\Sigma}$  と  $\partial H^3$  において角度  $\varphi_0 = \varphi_0(k_0)$  で交わる境界付き球面であることに注意する. また, 群  $H_\mu$  の対称性から, 上の主張は部分群  $\langle B, D_\mu \rangle$  に関する totally geodesic surface に関しても同様に成り立つ.

*Outline of proof.* Basmajian [3] の結果はより一般の設定におけるものである. 証明は容易なのでここにアウトラインを述べる.  $\Sigma$  の逆像  $\pi^{-1}(\Sigma) \subset H^3$  の 2 つの連結成分を  $\tilde{\Sigma}$  と  $\tilde{\Sigma}'$  とする. ここで,

ある  $k_0 > 0$  が存在して  $d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}') \geq k_0$  となることを示したい. いま  $\tilde{\Sigma}'$  の  $\tilde{\Sigma}$  への nearest point retraction の像  $\Delta \subset \tilde{\Sigma}$  を考えると, 任意の  $g \in \text{Stab}_{H_\mu}(\tilde{\Sigma})$  に対して  $g(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$  である. 従って  $\text{Area}(\Delta) \leq \text{Area}(\Sigma)$  であり, 求める  $k_0 > 0$  の存在が言える. 特に, この  $k_0 > 0$  は  $\mu \in \mathcal{M}_{0,4}$  の取り方に依らない.  $\square$

### 3.5 $p = 0$ 平面

ここでは  $p \in P_{p=0}$  の場合を考える. この平面  $P_{p=0}$  と  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  の交わりは, 平面  $P_{r=0}$  や  $P_{q=0}$  の場合と異なり, その境界がフラクタル集合ではなく加算個の解析的曲線から成ることを見る (Theorem 3.10).

**Definition 3.9** (Ford region). Kleinian group  $\Gamma \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  の任意の  $g \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  に対して  $g(\infty) \neq \infty$  が成り立つとき,

$$\text{Ford}(\Gamma) := \bigcap_{g \in \Gamma} E(g)$$

は群  $\Gamma$  の基本領域となる. ここで  $E(g)$  は  $g$  の isometric sphere の外側, すなわち  $\mathbb{S}^3 \setminus I(g)$  の  $\infty$  を含む連結成分である. この  $\text{Ford}(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の Ford domain と呼ぶ.

**Theorem 3.10.**  $p \in P_{p=0}$  とする. このとき  $p \in \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  となる必要十分条件は, 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $\text{radi}(I(A_p^n)) \leq 1$  となることである. さらに  $\text{radi}(I(A_p^n)) = 1$  となる必要十分条件は  $[A_p^n, B]$  が parabolic となることである.

*Proof.*  $p \in P_{p=0}$  より  $A_p$  は平面  $P_{x=0}$  を固定するので, 任意の  $n$  に対して  $I(A_p^n)$  の中心は平面  $P_{x=0}$  に含まれることに注意する. 従って,  $\text{radi}(I(A_p^n)) \leq 1$  ( $\forall n \in \mathbb{Z}$ ) と仮定すると,  $\langle A_p \rangle$  の Ford domain

$$\text{Ford}(\langle A_p \rangle) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} E(A_p^n)$$

が  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \geq 1\}$  を含む. このとき Poincaré の多面体定理より  $\text{Ford}(\langle A_p \rangle) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$  が  $G_p = \langle A_p, B \rangle$  の基本領域となり  $G_p$  は discrete である.

逆に, ある  $n$  に対して  $\text{radi}(I(A_p^n)) > 1$  と仮定すると, 下の Lemma 3.11 より  $[A_p^n, B]$  は elliptic となる. この元の order が無限ならば non-discrete になり, 有限ならば  $G_p$  は free group でなくなる. いずれにしても  $p \notin \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  である.

$\text{radi}(I(A_p^n)) = 1 \Leftrightarrow [A_p^n, B]: \text{parabolic}$ , も下の lemma から従う.  $\square$

**Lemma 3.11.**  $f \in \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  は loxodromic で  $f(\infty) \neq \infty$  かつ球面  $\hat{P}_{x=0}$  を向きを込めて固定するとする. また  $B(x) = x + (2, 0, 0)$  とする. このとき  $[f, B]$  が loxodromic, parabolic without rotation, elliptic となる必要十分条件はそれぞれ  $\text{radi}(I(f)) < 1, = 1, > 1$  である.

*Proof.*  $f^{-1}(\infty)$  と  $f(\infty)$  は平面  $P_{x=0}$  に含まれることに注意する. ここで平面  $P_{x=0}$  を保つ平行移動で共役をとって  $f^{-1}(\infty) = 0$  としてよい. また  $u = f(\infty)$  とおく. このとき  $I(f)$  の中心は  $0$ ,  $I(f^{-1})$  の中心は  $u$  である. ここで  $e_1 = (1, 0, 0)$  とおくとき, ある  $P \in O(3) \setminus SO(3)$  s.t.  $P(e_1) = e_1$  が存在して  $f(x) = PJ_{I(f)}(x) + u$  と書ける. これは  $P_{x=0} \cong \mathbb{C}$  の同一視の元で  $f \in \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$



より  $a_{n+1} = \mu a_n - c_n$ ,  $c_{n+1} = a_n$  が成り立つ。これより

$$c_1 = 1, c_2 = \mu, c_{n+2} = \mu c_{n+1} - c_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

という漸化式を得る。特に  $c_n = c_n(\mu)$  は  $\mu$  に関する monic な  $(n-1)$ -次多項式である。具体的には

$$\begin{aligned} c_3 &= \mu^2 - 1, \\ c_4 &= \mu^3 - 2\mu, \\ c_5 &= \mu^4 - 3\mu^2 + 1, \quad \dots \end{aligned}$$

である。Theorem 3.10 より

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \cap P_{p=0} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |c_n(\mu)| \geq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{Z})\}$$

である。ただしここで  $P_{p=0}$  と  $\mathbb{C}$  を同一視している。この領域の境界の様子は図 6, 7 を参照されたい。最後に図 10 に群  $G_p$  の limit set  $\Lambda(G_p)$  の様子を表すコンピュータ画像を載せた。

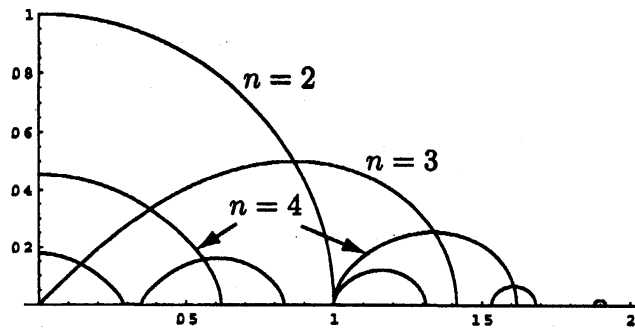


図 6:  $n = 2, 3, 4, 10$  の場合の  $|c_n(\mu)| = 1$  となる集合。ラベルしてないものは  $n = 10$  に対応。

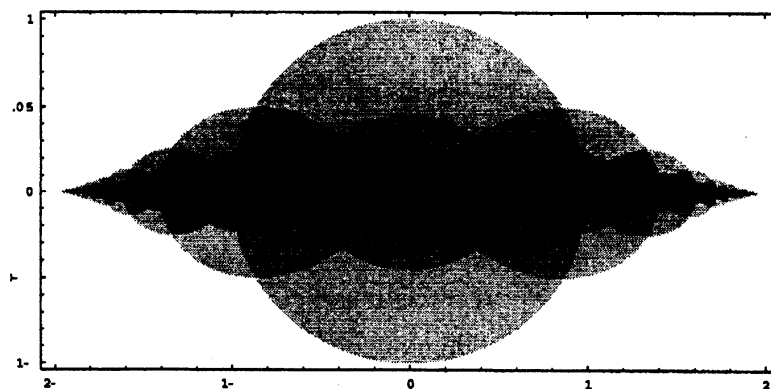


図 7:  $|c_n(\mu)| \leq 1$  となる領域を  $2 \leq n \leq 20$  まで重ね合わせたもの。重なりが多いほど色を濃くしている。



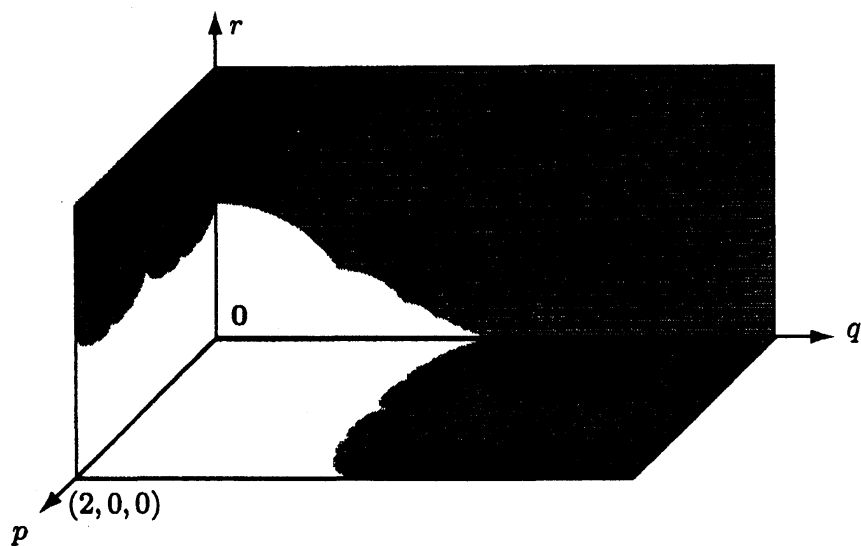


図 8:  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  と平面  $P_{p=0}$ ,  $P_{q=0}$ ,  $P_{r=0}$  との交わり.

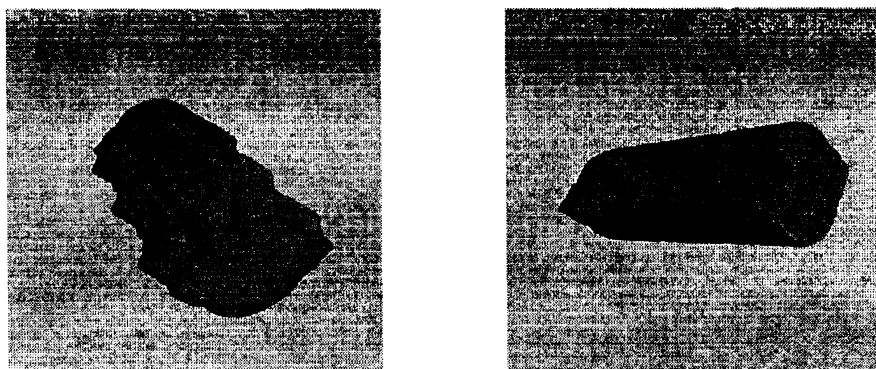
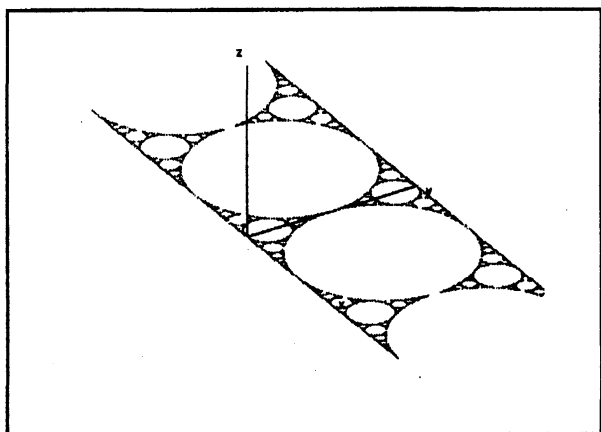
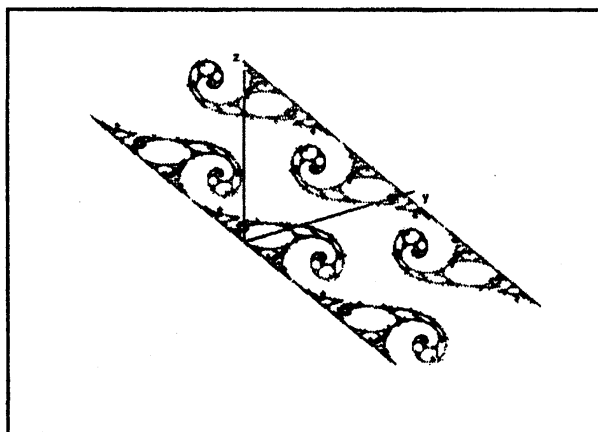


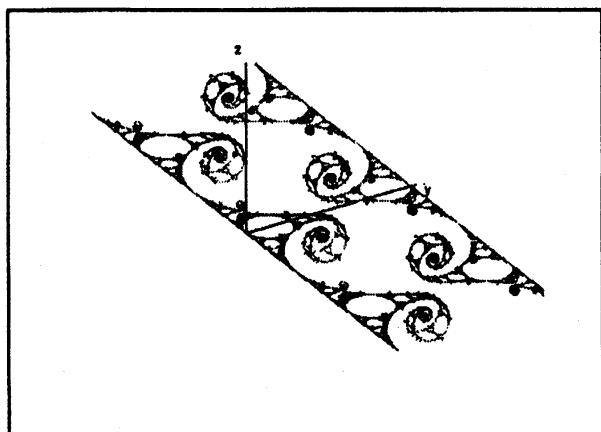
図 9: 山下靖氏 (奈良女子大) による数値実験的な  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  の絵. non-discrete の方から近似している.



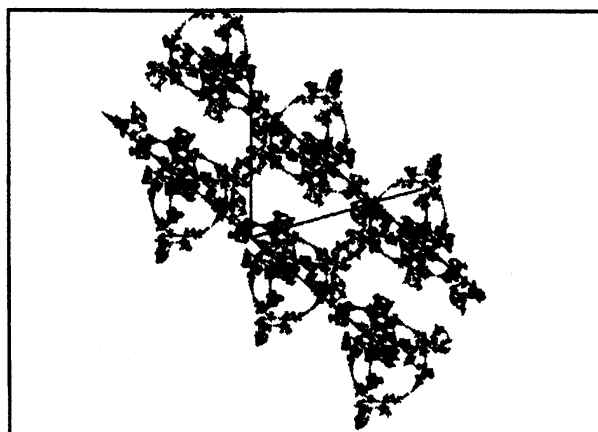
$$(p, q, r) = (0, 2, 0)$$



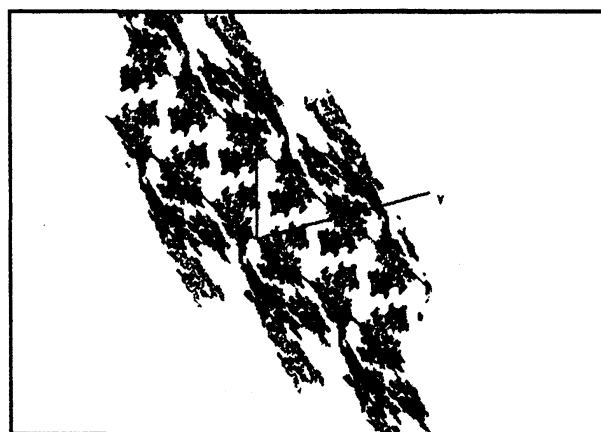
$$(p, q, r) = (-0.1, 1.8, 0.1)$$



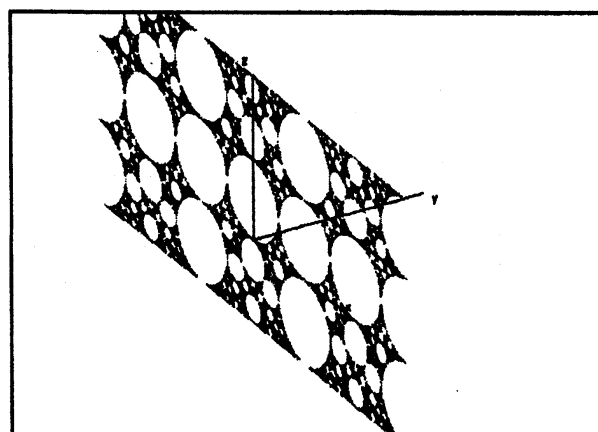
$$(p, q, r) = (0, 1.9, 0.04)$$



$$(p, q, r) = (0.2, 1, 0.5)$$



$$(p, q, r) = (-0.2, 0.3, 0.8)$$



$$(p, q, r) = (0, 0, 1)$$

図 10:  $\Lambda(G_p)$  のコンピュータ・グラフィックス. limit set の点は  $z$  の値に応じて明るさを変えている.

#### 4 Appendix (torsionのある場合)

$p = (p, 0, 0)$ ,  $p > 2$  に対して次のような 6 面体 (図 11 参照)

$$\mathcal{D}_p = \left\{ x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1/\sqrt{2}, |z| \leq 1/\sqrt{2}, |x| \geq 1, |x - p| \geq 1 \right\} \quad (2)$$

を取り, その対面の張り合わせ写像から生成される  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  の離散部分群

$$K_p = \langle A_p, B, C \rangle; \quad A_p(x) = \hat{J}J(x) + p, \quad B(x) = x + (\sqrt{2}, 0, 0), \quad C(x) = x + (0, 0, \sqrt{2}) \quad (3)$$

を考える. この節ではこの群  $K_p$  の  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  における変形空間を考えたい. その準備として, まず cone angle  $\pi (= 2\pi/2)$  の特異点を 1 つ持つトーラス  $\Sigma_{1,0,2}$  と同型な  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  中のクライン群を考える. ここで orbifold  $\Sigma_{1,0,2}$  の基本群  $\pi_1(\Sigma_{1,0,2})$  は抽象群  $\langle a, b \mid [a, b]^2 = \text{id} \rangle$  に同型である.

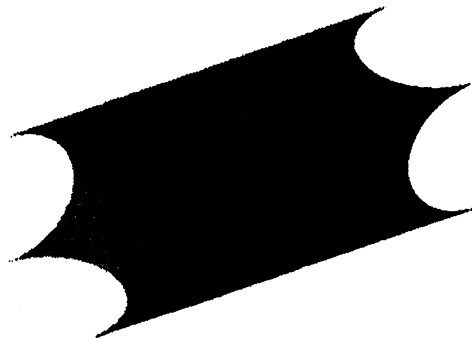


図 11: 基本領域  $\mathcal{D}$  ( $p = 4$  の場合)

**Theorem 4.1** (groups of  $(1, 0; 2)$ -type).  $\rho : \pi_1(\Sigma_{1,0,2}) = \langle a, b \mid [a, b]^2 = \text{id} \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  を中への同型写像とし, さらに  $\rho(b)$  が *parabolic without rotation* であるとする. このときある  $p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$  が存在して,  $\rho$  は次を満たす  $\rho_p : \pi_1(\Sigma_{1,0,2}) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  に共役である:

$$\rho_p(a) = A_p, \quad \rho_p(b) = B; \quad A_p(x) = \hat{J}J(x) + p, \quad B(x) = x + (\sqrt{2}, 0, 0).$$

さらに  $p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$  は  $p$ -軸に関する角度  $\pi$  回転  $R_\pi$  を除いて一意的である.

*Proof.* 証明は Theorem 3.1 と同様である. ただし,  $A = \rho(a)$ ,  $B = \rho(b)$  に対して  $\text{Fix}(A) \cap \text{Fix}(B) = \emptyset$  を示すのに, もう少し丁寧に議論する必要がある. いま  $\text{Fix}(A) \cap \text{Fix}(B) \neq \emptyset$  と仮定する. 共役を取って  $\infty \in \text{Fix}(A) \cap \text{Fix}(B)$  とすると, Lemma 2.1 より  $A(x) = \lambda P(x) + u$ ,  $B(x) = x + v$  の形に書ける. このとき計算から  $[A, B](x) = x + \lambda P(v) - v$  となるので,  $[A, B]$  は *parabolic without rotation* であり, かつ  $[A, B](\infty) = \infty$  が成り立つ. 従って  $B$  と  $[A, B]$  は可換となるが, これは群  $\langle A, B \rangle$  が  $\langle a, b \mid [a, b]^2 = \text{id} \rangle$  に同型であることに矛盾する.

以下は Theorem 3.1 と同様に考えると,  $A^{-1}B^{-1}AB$  に  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  の元

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 - \mu^2 \end{pmatrix}$$

が対応し、条件  $[A, B]^2 = \text{id}$  より  $\mu = \sqrt{2}$  が分かる。従って求める正規化を得る。  $\square$

ここで (3) で与えたクライン群  $K_p = \langle A_p, B, C \rangle \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  において、 $B, C$  は可換な parabolic without rotation であり、部分群  $\langle A_p, B \rangle$  と  $\langle A_p, C \rangle$  は  $(1, 0; 2)$ -type で、部分群  $\langle A_p, BC \rangle$  は  $(1, 1)$ -type であることに注意する。逆に Theorem 4.1 を用いるとこのような群は次のように特徴付けられる：

**Theorem 4.2.** 抽象群  $g = \langle a, b, c \mid [a, b]^2 = [a, c]^2 = [b, c] = \text{id} \rangle$  から  $\text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  の中への同型写像  $\psi : g \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  において  $\psi(b), \psi(c), \psi([a, bc])$  が *parabolic without rotation* であるとする。このときある  $p \in \mathbb{R}^3$  が一意的に存在して、 $\psi$  は次を満たす  $\psi_p : g \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  に共役である：

$$\begin{aligned} \psi_p(a) &= A_p, \quad \psi_p(b) = B, \quad \psi_p(c) = C; \\ A_p(x) &= \hat{J}J(x) + p, \quad B(x) = x + (\sqrt{2}, 0, 0), \quad C(x) = x + (0, 0, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

*Proof.* まず  $g$  の部分群  $\langle a, b \mid [a, b]^2 = \text{id} \rangle$  に注目すると、Theorem 4.1 よりある  $p \in \mathbb{R}^3$  が存在して  $\psi(a) = A_p, \psi(b) = B$  としてよい。このとき  $C = \psi(c)$  は  $B$  と可換な parabolic rotation であるので  $C(\infty) = \infty$  となる。いま  $A_p$  の isometric sphere を半径 1 に正規化しているので Theorem 4.1 と Theorem 3.3 より  $C$  は長さ  $\sqrt{2}$  の平行移動であり、 $BC$  は長さ 2 の平行移動である。従って  $B$  と  $C$  の平行移動の方向は直交する。また、 $p$  は一意的に決まることも分かる。  $\square$

ここで次のように定める：

$$\mathcal{N} = \{p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \mid \psi_p : \text{faithful, discrete}\}.$$

このとき Poincaré の多面体定理より次が言える：

**Lemma 4.3.**  $\mathcal{N} \supset \{p = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \mid |p| \geq 2\}.$

群  $K_p$  の変形空間  $\mathcal{N}$  は、 $K_p$  部分群  $\langle A_p, B \rangle, \langle A_p, C \rangle, \langle A_p, BC \rangle$  の  $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  での変形空間をスライスとして含んでいると思われる。これを次に予想の形で書く。いま、 $\mathcal{M}_{1,1}$  のときと同様に、 $\mu \in \mathbb{C}$  に対して  $\rho_\mu : \pi_1(\Sigma_{1,0;2}) = \langle a, b \mid [a, b]^2 = \text{id} \rangle \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  を  $\rho_\mu(a) = A_\mu, \rho_\mu(b) = B, A_\mu(\tau) = 1/\tau + \mu, B(\tau) = \tau + \sqrt{2}$  と定め

$$\mathcal{M}_{1,0;2} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \rho_\mu : \text{discrete, faithful}\}$$

とおく。  $\mathcal{M}_{1,0;2} \subset P_{r=0} \subset \mathbb{R}^3$  とみて、それを  $q$ -軸に関して  $\frac{\pi}{2}$  回転したものを  $R_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{M}_{1,0;2})$  と書く。また  $\mathcal{M}_{1,1} \subset P_{r=0} \subset \mathbb{R}^3$  を  $q$ -軸に関して  $\frac{\pi}{4}$  回転したものを  $R_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{M}_{1,1})$  と書く。このとき、 $\mathcal{N}$  が平行移動  $(0, \sqrt{2}m, \sqrt{2}n)$  に関して不変であることを考え合わせると、次が成り立つと予想される：

**Conjecture 4.4.**

$$\mathcal{N} \supset \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} (0, \sqrt{2}m, \sqrt{2}n) + (\mathcal{M}_{1,0;2} \cup R_{\pi/2}(\mathcal{M}_{1,0;2}) \cup R_{\pi/4}(\mathcal{M}_{1,1})).$$

次に  $K_p$  の極限集合  $\Lambda(K_p)$  について考える. まず,  $K_p$  の不連続領域  $\Omega(K_p)$  は  $\mathcal{D}_p$  の軌道からなる連結, 単連結な成分を持つことに注意する. これより  $\Lambda(K_p)$  は連結である. 次に  $A_p^{-1}BA_p = JBJ$ ,  $A_p^{-1}CA_p = JCJ$  であることに注意すると

$$L := \langle B, C, JBJ, JCJ \rangle \subset K_p$$

が成り立つ. ここで  $L \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^3)$  は球面  $\hat{P}_{y=0}$  を不変にし,  $\hat{P}_{y=0} \cong \hat{\mathbb{C}}$  の同一視の元に, 次の元で生成される  $\text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  の部分群  $L' := \langle B, C, \bar{B}, \bar{C} \rangle$  の Poincaré extension である:

$$B(\tau) = \tau + \sqrt{2}, \quad C(\tau) = \tau + i\sqrt{2}, \quad \bar{B}(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{2}\tau + 1}, \quad \bar{C}(\tau) = \frac{\tau}{i\sqrt{2}\tau + 1}.$$

この群  $L' \subset \text{Conf}(\mathbb{S}^2)$  は, 頂点が全て理想境界  $\hat{\mathbb{C}}$  にある正 8 面体を基本領域 ( $\subset \mathbb{H}^3$ ) に持つので第一種クライン群であり, 従って  $\Lambda(L) = \hat{P}_{y=0}$  である. また球面  $\Lambda(L)$  の内部 ( $y < 0$  の領域) は  $(K_p, L)$ -invariant であることも分かる. これより  $\Lambda(K_p)$  は球面  $\Lambda(L)$  の軌道より成る「雪だるま」状の連結な集合である (図 13 参照).

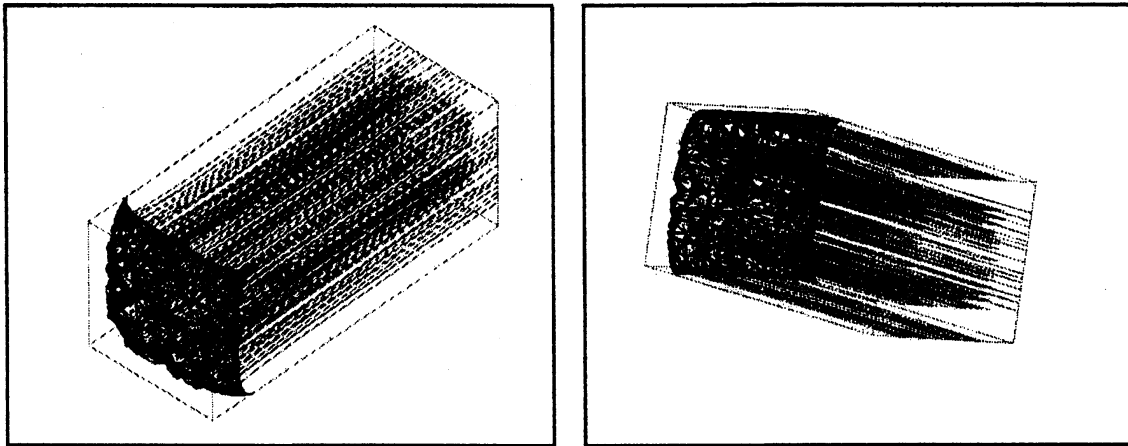


図 12:  $\mathcal{N}$  の (境界の) 数値実験的な描画の試み:  $\mathcal{N}$  の中で parabolic に変形可能であろう word を推測し, その「pleated ray もどき」を描かせた. ここでは quaternion algebra を用いた parabolic element の特徴付け (cf. Kido [7]) を用いている. 底辺の正方形の範囲は  $0 \leq p, q \leq \sqrt{2}$  である.

## 参考文献

- [1] K. Ahara and Y. Araki. Classification of Ideal Regular Sphairahedra. Meiji Institute for Mathematical Science Report No. 022004, June 2, 2004.
- [2] B. N. Apanasov. Conformal geometry of discrete groups and manifolds. de Gruyter Expositions in Mathematics, 32. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

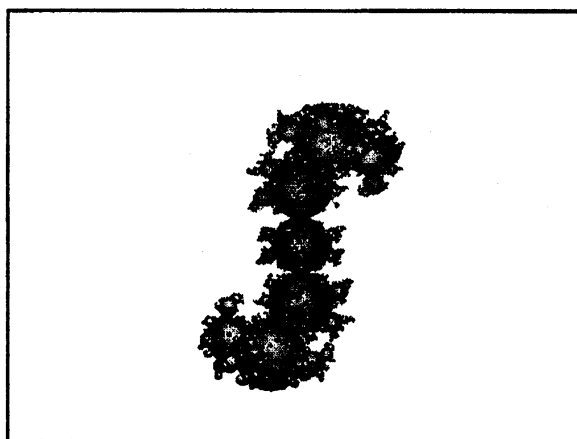


図 13:  $\Lambda(K_p)$  のコンピュータグラフィックス.

- [3] A. Basmajian. Tubular neighborhoods of totally geodesic hypersurfaces in hyperbolic manifolds. *Invent. Math.* **117** (1994), no. 2, 207–225.
- [4] A. F. Beardon. The geometry of discrete groups. (English summary) Corrected reprint of the 1983 original. *Graduate Texts in Mathematics*, 91. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [5] W. Cao, J. Parker and X. Wang. On the classification of quaternionic Möbius transformations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **137** (2004) 349–361.
- [6] M. Kapovich. Kleinian groups in higher dimensions. *ArXiv:math.GT/0701370*
- [7] T. Kido. Möbius transformations on quaternion. *Tohoku Math. J.*, to appear.
- [8] I. Kra. Horocyclic coordinates for Riemann surfaces and moduli spaces. I. Teichmüller and Riemann spaces of Kleinian groups. *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 3, 499–578.
- [9] L. Keen and C. Series. Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori. *Topology* **32** (1993), no. 4, 719–749.
- [10] B. Maskit. Kleinian groups. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, 287. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [11] S. Matsumoto. Foundations of flat conformal structure. *Aspects of low-dimensional manifolds*, 167–261, *Adv. Stud. Pure Math.*, 20, Kinokuniya, Tokyo, 1992.